13/12/19

Θεώρημα

Αν $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι γραμμική απεικόνιση, τότε υπάρχουν βάσεις S του $\mathbb{R}^n$ και S' του $\mathbb{R}^m$ ώστε ο πίνακας της T ως προς αυτές τις βάσεις να έχει μορφή

$$(T,S,S') = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Οπου $r = \dim Im(T) \Rightarrow \dim Ker T = n - r$

Θεώρημα

Αν $T: V^n \to W^m$ είναι γραμμική απεικόνιση τότε υπάρχουν βάσεις $S = (v_1, \dots, v_n)$ του V^n και $S' = (w_1, \dots, w_m)$ του W^m ώστε ο πίνακας της T ως προς αυτές τις βάσεις να έχει μορφή

$$(T,S,S') = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Οπου $r = \dim Im T$

Σύνολο που έχει ιδιότητες πρόσθεση, ~~πολ.~~ εσωτερικό γινόμενο. ονομάζεται άλγεβρα

Ορισμός

Έστω V^n και W^m δυο διανυσματικοί χώροι. Με $\mathcal{L}(V,W)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων από τον V στον W.

Πρόταση

Το σύνολο $\mathcal{L}(V,W)$ αποτελεί διανυσματικό χώρο με πράξεις

$T, T' \in \mathcal{L}(V,W)$ $\quad T+T': V \to W$

και $aT: V \to W$ για $a \in \mathbb{R}$

$T+T': V \to W$

$(T+T')(v) = T(v) + T'(v)$

$(aT)(v) = aT(v)$

Ø Πρόταση

Ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{L}(V,V)$ είναι εφοδιασμένος και με μια ακόμη πράξη τη σύνθεση

$$V \xrightarrow[T_1]{} V \xrightarrow[T_2]{} V$$

Ορίζεται η σύνθεση $T_2 \cdot T_1$ η οποία είναι επίσης γραμμική

Θεώρημα

Έστω V^n και W^m δύο δ.χ και S και S' δύο βάσεις για τους V και W αντίστοιχα. Τότε υπάρχει ισομορφισμός διανυσματικών χώρων

$$\varphi : \mathcal{L}(V,W) \to M(m\times n, \mathbb{R})$$

Απόδειξη

$$\varphi : \mathcal{L}(V,W) \to M(m\times n, \mathbb{R})$$

$$T \longmapsto \varphi(T) = (T, S, S')$$

αλλάξει βάση αλλάξει πίνακας και η απεικόνιση

$T_1 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$

T_{mn}

$S = (v_1 \quad v_n)$ $\quad T_1 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \quad + a_n v_n$

$S' = (w_1 \quad w_m)$ $\quad = a_1 w_1$

Πόρισμα

$T_{m \cdot n}$ $\quad S=(v_1 \quad v_n) \quad T_1 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \quad + a_n v_n$

$S'=(w_1 \quad w_m) \quad = a_1 w_1$

Πόρισμα

$\dim \mathcal{L}(V^n, W^m) = n \cdot m$

Απόδειξη

Αν θεωρήσουμε βάσεις S και S' για τους V και W αντίστοιχα έχουμε τον ισομορφισμό

$$\varphi : \mathcal{L}(V,W) \to M(m \times n, \mathbb{R})$$

Άρα $\dim \mathcal{L}(V,W) = \dim M(m \times n, \mathbb{R}) = m \cdot n$

$T: V^n \to W^m$

$S(v_1, \dots \quad v_n) \quad S' = (w_1, \quad w_m)$

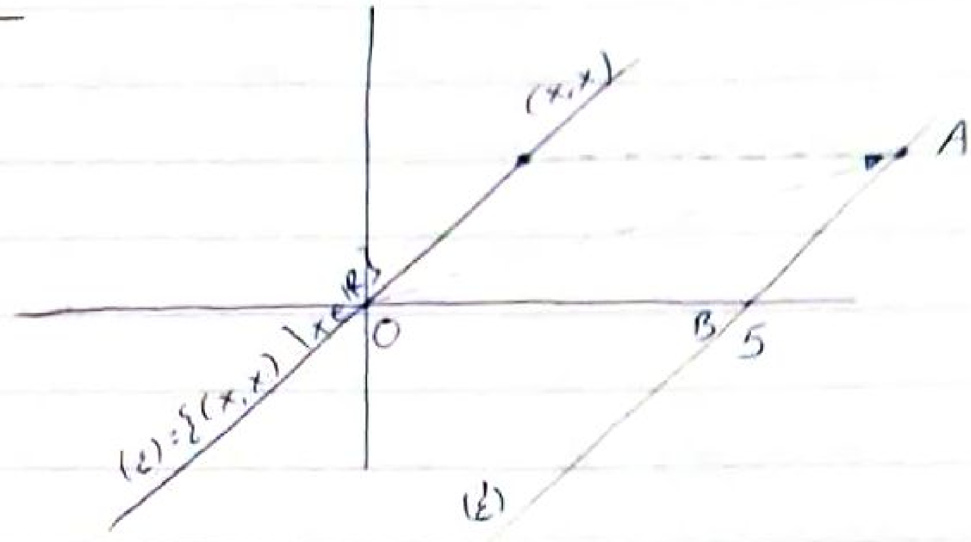
$T_1(v_1) = w_1$ ή w_2 ή $\qquad T_2(v_1) = 0 \qquad$ παίρνω τους

$T_1(v_2) = 0 \qquad T_2(v_2) = w_1$ ή $w_2 \qquad$ ανδιαστάσεις

$T_1(v_n) = 0$

Σύμπλοκα

π.χ $\mathbb{R}^2$



$\vec{OA} = \vec{OB} + \vec{BA}$

$\quad = (5,0) + (x,x)$

$(\varepsilon) = \langle(1,1)\rangle \leq \mathbb{R}^2$

$(\varepsilon') \nleq \mathbb{R}^2$

$(\varepsilon') = \{(5,0)+(x,x) \mid x\in\mathbb{R}\} = (5,0) + (\varepsilon)$

Ορισμός

Έστω V δ.χ και Y υπόχωρος του V. Αν v είναι ένα διάνυσμα του V, τότε ορίζεται το σύμπλοκο του Y ως προς το v να είναι το σύνολο

$$v + Y = \{v + w \mid w \in Y\}$$